Parcijalne diferencijalne jednačine - Vježbe 4

Predati rad predmetnom natavniku na kraju pete sedmice predavanja
(10.11.2008.)

1. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup i neka je $\Omega^- := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} = \mathbb{R}^n \setminus (\Omega \cup \partial\Omega)$. Pretpostavite da je $u \in C^2(\Omega^-) \cap C(\overline{\Omega^-})$, $\Delta u = 0$ na Ω^- i $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} u(\mathbf{x}) = 0$. Pokažite da je
$$\max_{\overline{\Omega^-}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|. \tag{1}$$

   [Pomoć: Primjenite princip maksimuma na skup
$$\Omega_R^- := \Omega^- \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < R\},\ R > 0.$$
   i onda pustite da $R \to \infty$.]

   Rješenje. Prema principu maksimuma
$$\max_{\overline{\Omega_R^-}} |u| = \max_{\partial\Omega_R^-} |u|.$$
   Jednakost $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ implicira
$$\max_{|x|=R} |u(x)| \to 0 \text{ kako } R \to \infty.$$
   Kako je $\partial\Omega_R^- = \partial\Omega \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = R\}$, imamo
$$\max_{\overline{\Omega_R^-}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| \text{ za dovoljno veliko R.}$$
   Uzimajući $R \to \infty$ dobivamo (1).

2. Koristeći zadatak 1 sa trećih vježbi pokažite da su funkcije
$$r^k \cos k\varphi,\ r^k \sin k\varphi, \quad k \in \mathbb{N}$$
   harmonične. Ovdje je $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi$.

Nađite rješenje slijedećeg Dirichletovog problema za jedinični disk:

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) &= 0, & |\mathbf{x}| < 1 \\ u(e^{i\varphi}) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos(k\varphi) + b_k\sin(k\varphi)), & 0 \le \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Rješenje. Kako je funkcija $f(z) = z^k = r^k e^{ki\varphi}$, $z = x_1 + ix_2 = re^{i\varphi}$ analitična, njeni realni i imaginarni dijelovi $\mathrm{Re}\, f = r^k \cos k\varphi$ i $\mathrm{Im}\, f = r^k \sin k\varphi$ su analitične funkcije (vidi zadatak 1 sa prošlih vježbi). Onda je linearna kombinacija

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k r^k \cos k\varphi + b_k r^k \sin k\varphi)$$

također harmonična. Jasno je da ova funkcija zadovoljava Dirichletov rubni uslov

$$u(e^{i\varphi}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

3. Neka je

$$f(e^{i\varphi}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\varphi) + b_k\sin(k\varphi)), \ 0 \le \varphi < 2\pi \tag{2}$$

gdje je red apsolutno konvergentan. Dokažite da

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos(k\theta)d\theta, \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin(k\theta)d\theta, \tag{3}$$

[Pomoć: pomnožite obje strane jednačine (2) sa $\cos m\varphi$ ili $\sin m\varphi$ i integrirajte rezultat od 0 do 2π.]

Rješenje. Primjetite da

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(m-k)\varphi + \cos(m+k)\varphi)d\varphi =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{za} \quad m \ne k, \\ \pi, & \text{za} \quad m = k > 0, \\ 2\pi, & \text{za} \quad m = k = 0, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin k\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(m-k)\varphi - \cos(m+k)\varphi)d\varphi =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{za} \quad m \neq k, \\ \pi, & \text{za} \quad m = k > 0, \\ 0, & \text{za} \quad m = k = 0, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos k\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin(m-k)\varphi + \sin(m+k)\varphi) d\varphi = 0.$$

Množeći obje strane jednačine (2) sa $\cos m\varphi$ ili $\sin m\varphi$, integrirajući rezultat od 0 do 2π i koristeći gornje formule dobivamo (3).

4. Neka je f funkcija iz prethodnog zadatka. Poažite da je rješenje Dirichletovog problema

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0, & |\mathbf{x}| < 1 \\ u(e^{i\varphi}) = f(e^{i\varphi}), & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases} \tag{4}$$

dato formulom

$$u(r\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos[k(\theta - \varphi)]\right) d\theta. \tag{5}$$

Dokažite da je

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k\omega) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\omega},$$

[Pomoć: $1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k\omega) = Re(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty})z^k,\ z = r\exp(i\omega)$].

Odavdje izvedite Poissonovu formulu

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}. \tag{6}$$

Rješenje. Možemo pokazati da ako je red (2) apsolutno konvergentan onda je

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

U ovom slučaju je funkcija

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k r^k \cos k\varphi + b_k r^k \sin k\varphi)$$

rješenje dirichletovog problema (4) (vidite zadatak 2). Koristeći (3) dobivamo

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos k\theta \cos k\varphi d\theta + \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin k\theta \sin k\varphi d\theta =\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos k(\theta-\varphi)d\theta,$$

tj. (5) vrijedi. Dalje,

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\omega = \text{Re}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty} z^k\right) = \text{Re}\left(-1+2\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) =$$

$$= \text{Re}\left(-1+\frac{2}{1-z}\right) = \text{Re}\,\frac{1+z}{1-z} = \text{Re}\,\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega},$$

gdje je $z = r\exp(i\omega)$. Stavljajući ovo u (5), dobivamo (6).