Parcijalne diferencijalne jednačine - Vježbe 5

1. Izvedite teoremu srednje vrijednosti za harmonične funkcije u dvodimenzionalnom prostoru: Pretpostavimo da je $u(\mathbf{x})$ harmonična na domeni koja striktno sadrži $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | |\mathbf{x}| < \rho\}$ i neka je $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | |\mathbf{x}| = \rho\}$ njena granica. Onda je

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_\Gamma u dS,$$

gdje je desna strana linijski intergal prvog tipa duž kružnice.

2. Pod pretpostavkama pitanja 1, pokažite da ako u doseže svoj maksimum na $\overline{D}$ u $(0,0)$, onda je $u(x,y) \equiv u(0,0)$ na $\overline{D}$.

3. Pretpostavite da je $\rho = 1$ u pitanju 1. Koristeći polarne koordinate $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, i pod pretpostavkom da je $u(\cos\theta, \sin\theta) = 1 - \cos 2\theta$, nađite $u(0,0)$.

Parcijalne diferencijalne jednačine - Vježbe 5

1. Izvedite teoremu srednje vrijednosti za harmonične funkcije u dvodimenzionalnom prostoru: Pretpostavimo da je $u(\mathbf{x})$ harmonična na domeni koja striktno sadrži $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | |\mathbf{x}| < \rho\}$ i neka je $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | |\mathbf{x}| = \rho\}$ njena granica. Onda je

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_\Gamma u dS,$$

gdje je desna strana linijski intergal prvog tipa duž kružnice.

2. Pod pretpostavkama pitanja 1, pokažite da ako u doseže svoj maksimum na $\overline{D}$ u $(0,0)$, onda je $u(x,y) \equiv u(0,0)$ na $\overline{D}$.

3. Pretpostavite da je $\rho = 1$ u pitanju 1. Koristeći polarne koordinate $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, i pod pretpostavkom da je $u(\cos\theta, \sin\theta) = 1 - \cos 2\theta$, nađite $u(0,0)$.