

# Popularna matematika

Vedad Pašić

6. lipnja 2009.

# Bertrand Russell



# Bertrand Russell

Bertrand Arthur William Russell (1872. - 1970.), engleski filozof, matematičar i društveni reformator.

# Bertrand Russell

Bertrand Arthur William Russell (1872. - 1970.), engleski filozof, matematičar i društveni reformator.

Na Trinity Collegeu u Cambridgeu studirao je filozofiju i matematiku, gdje po završetku studija 1895. počinje sveučilišnu karijeru. Potomak je ugledne plemićke obitelji, ali ubrzo i sam stječe glas slobodnog mislioca, pacifista, kritičara građanskog morala i borca za ljudsku jednakost.

# Bertrand Russell

Bertrand Arthur William Russell (1872. - 1970.), engleski filozof, matematičar i društveni reformator.

Na Trinity Collegeu u Cambridgeu studirao je filozofiju i matematiku, gdje po završetku studija 1895. počinje sveučilišnu karijeru. Potomak je ugledne plemićke obitelji, ali ubrzo i sam stječe glas slobodnog mislioca, pacifista, kritičara građanskog morala i borca za ljudsku jednakost.

Od 1938. do 1944. predavao je na različitim sveučilištima u SAD-u, a tek je 1944. ponovno izabran za profesora na Trinity Collegeu.

# Bertrand Russell

Godine 1950. dobio je Nobelovu nagradu za književnost. Njegovo prvo filozofsko zanimanje vezano je uz matematički prilaz filozofije, a iz te faze proizašlo je monumentalno djelo "Principia Mathematica", nastalo u suradnji s A. N. Whiteheadom, koje je obojici autora donijelo svjetsku slavu i postalo ishodište novog smjera u filozofiji i matematici.

# Bertrand Russell

Godine 1950. dobio je Nobelovu nagradu za književnost. Njegovo prvo filozofsko zanimanje vezano je uz matematički prilaz filozofije, a iz te faze proizašlo je monumentalno djelo "Principia Mathematica", nastalo u suradnji s A. N. Whiteheadom, koje je obojici autora donijelo svjetsku slavu i postalo ishodište novog smjera u filozofiji i matematici. Vec 1901. istaknuo se kao briljantan logičar, uočivši paradoks koji je proizlazio iz petog aksioma Fregeove logičke analize aritmetike (Russellov paradoks).

# Russellov Paradoks

- ▶ Cantorova teorija skupova sa kraja 19. vijeka nije bila zasnovana aksiomatski pa se zato nazivala naivna teorija skupova. Međutim ona je implicitno u sebi sadržala nekoliko aksioma od kojih je jedna bila da za svako svojstvo možemo formirati skup svih elemenata koji imaju to svojstvo.

# Russellov Paradoks

- ▶ Cantorova teorija skupova sa kraja 19. vijeka nije bila zasnovana aksiomatski pa se zato nazivala naivna teorija skupova. Međutim ona je implicitno u sebi sadržala nekoliko aksioma od kojih je jedna bila da za svako svojstvo možemo formirati skup svih elemenata koji imaju to svojstvo.
- ▶ Polazeci od ove aksiome Bertrand Russell je 1903. konstruisao paradoks, po njemu nazvan *Russellov paradoks* koji je oborio naivnu teoriju skupova.

# Russellov Paradoks

- ▶ Ako za svako svojstvo postoji skup svih objekata koji zadovoljavaju to svojstvo onda to isto važi i za svojstvo “skup ne pripada sam sebi”.

# Russellov Paradoks

- ▶ Ako za svako svojstvo postoji skup svih objekata koji zadovoljavaju to svojstvo onda to isto važi i za svojstvo “skup ne pripada sam sebi”.
- ▶ Oznacimo sa  $X$  skup objekata za koje važi ovo svojstvo. Da li  $X$  pripada sam sebi? Ako pripada onda znaci da zadovoljava svojstvo “skup ne pripada sam sebi” što je kontradikcija.

# Russellov Paradoks

- ▶ Ako za svako svojstvo postoji skup svih objekata koji zadovoljavaju to svojstvo onda to isto važi i za svojstvo “skup ne pripada sam sebi”.
- ▶ Oznacimo sa  $X$  skup objekata za koje važi ovo svojstvo. Da li  $X$  pripada sam sebi? Ako pripada onda znaci da zadovoljava svojstvo “skup ne pripada sam sebi” što je kontradikcija.
- ▶ Ako pak ne pripada sam sebi onda će da zadovolji traženo svojstvo pa će baš da pripada sebi, što je opet kontradikcija.

$$V = \{X \mid X \notin X\}$$

# Russellov Paradoks

- ▶ Jedna varijanta iskazivanja Russellovog paradoksa je:  
Postoje katalozi knjiga iz biblioteke. Ti katalozi se također smatraju za knjige. Neki katalozi sadrže sebe, a neki ne. Možemo posmatrati jedan novi katalog u koji su popisani svi katalozi koji ne sadrže sebe.

# Russellov Paradoks

- ▶ Jedna varijanta iskazivanja Russellovog paradoksa je:  
Postoje katalozi knjiga iz biblioteke. Ti katalozi se također smatraju za knjige. Neki katalozi sadrže sebe, a neki ne. Možemo posmatrati jedan novi katalog u koji su popisani svi katalozi koji ne sadrže sebe.
- ▶ Da li ovaj katalog sadrži sam sebe? Ponovo će oba slučaja analiziranja dovesti do kontradikcije.

# Russellov Paradoks

- ▶ Jedna varijanta iskazivanja Russellovog paradoksa je: Postoje katalozi knjiga iz biblioteke. Ti katalozi se također smatraju za knjige. Neki katalozi sadrže sebe, a neki ne. Možemo posmatrati jedan novi katalog u koji su popisani svi katalozi koji ne sadrže sebe.
- ▶ Da li ovaj katalog sadrži sam sebe? Ponovo će oba slučaja analiziranja dovesti do kontradikcije.
- ▶ Do pojave ovog paradoksa verovalo se u nepobitnost matematičke istine i neprotivječnost Cantorove teorije skupova. Posle Russellovog paradoksa uslijedila je i serija drugih paradoksa.

# Uvod u magične kvadrate

## Definicija

U rekreacionalnoj matematici, magični kvadrat reda  $n$  je skup  $n$  brojeva, uobičajeno različitih cijelih brojeva, unutar jednog kvadrata, takav da je zbir svih  $n$  brojeva u svim redovima i svim kolonama kvadrata, te po obje dijagonale kvadrata jednak istoj konstanti.

# Uvod u magične kvadrate

## Definicija

U rekreacionalnoj matematici, magični kvadrat reda  $n$  je skup  $n$  brojeva, uobičajeno različitih cijelih brojeva, unutar jednog kvadrata, takav da je zbir svih  $n$  brojeva u svim redovima i svim kolonama kvadrata, te po obje dijagonale kvadrata jednak istoj konstanti.

- ▶ Normalni magični kvadrat zadrži cijele brojeve od 1 do  $n$ .

# Uvod u magične kvadrate

## Definicija

U rekreacionalnoj matematici, magični kvadrat reda  $n$  je skup  $n$  brojeva, uobičajeno različitih cijelih brojeva, unutar jednog kvadrata, takav da je zbir svih  $n$  brojeva u svim redovima i svim kolonama kvadrata, te po obje dijagonale kvadrata jednak istoj konstanti.

- ▶ Normalni magični kvadrat zadrži cijele brojeve od 1 do  $n$ .
- ▶ Normalni magični kvadrati postoje za sve redove  $n \geq 1$ , osim za red  $n = 2$ , iako je kvadrat reda 1 trivijalan. Najmanji netrivijalni primjer je reda 3.

# Magični kvadrati

|             |             |             |             |               |
|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|
| <b>= 15</b> |             |             |             | <b>= 15</b>   |
|             | <b>6</b>    | <b>1</b>    | <b>8</b>    | <b>— = 15</b> |
|             | <b>7</b>    | <b>5</b>    | <b>3</b>    | <b>— = 15</b> |
|             | <b>2</b>    | <b>9</b>    | <b>4</b>    | <b>— = 15</b> |
|             | <b> </b>    | <b> </b>    | <b> </b>    |               |
| <b>= 15</b> | <b>= 15</b> | <b>= 15</b> | <b>= 15</b> |               |

# Magični kvadrati

- ▶ Konstantna suma u svakom redu, koloni i dijagonali se zove magična konstanta ili magična suma  $M$ .

# Magični kvadrati

- ▶ Konstantna suma u svakom redu, koloni i dijagonali se zove magična konstanta ili magična suma  $M$ .
- ▶ Magična konstanta zavisi samo od reda kvadrata  $n$  i ima vrijednost:

$$M(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

# Magični kvadrati

- ▶ Konstantna suma u svakom redu, koloni i dijagonali se zove magična konstanta ili magična suma  $M$ .
- ▶ Magična konstanta zavisi samo od reda kvadrata  $n$  i ima vrijednost:

$$M(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

- ▶ Niz suma magičnih kvadrata je 15, 34, 65, 111, 175, 260 ...

# Historija Magičnih kvadrata

- ▶ Magični kvadrati su bili poznati kineskim matematičarima čak 650 p.n.e. te arapskim matematičarima u 7. vijeku n.e. nakon arapskih osvajanja sjeveroistočnih dijelova indijskog podkontinenta kada Arapi dolaze u dodir sa indijskom matematikom i astronomijom i drugim aspektima kombinatorike.

# Historija Magičnih kvadrata

- ▶ Magični kvadrati su bili poznati kineskim matematičarima čak 650 p.n.e. te arapskim matematičarima u 7. vijeku n.e. nakon arapskih osvajanja sjeveroistočnih dijelova indijskog podkontinenta kada Arapi dolaze u dodir sa indijskom matematikom i astronomijom i drugim aspektima kombinatorike.
- ▶ Prvi m.k. reda 5 i 6 se pojavljuju u eniklopediji iz Bagdada oko 983g.n.e. - Enciklopedija Braće od Čistoće (Rasa'il Ihkwan al-Safa).

# Historija Magičnih kvadrata

- ▶ Magični kvadrati su bili poznati kineskim matematičarima čak 650 p.n.e. te arapskim matematičarima u 7. vijeku n.e. nakon arapskih osvajanja sjeveroistočnih dijelova indijskog podkontinenta kada Arapi dolaze u dodir sa indijskom matematikom i astronomijom i drugim aspektima kombinatorike.
- ▶ Prvi m.k. reda 5 i 6 se pojavljuju u eniklopediji iz Bagdada oko 983g.n.e. - Enciklopedija Braće od Čistoće (Rasa'il Ihkwan al-Safa).
- ▶ Originalni m.k. se pojavljuje u kineskoj legendi o Lo Shu-u 650. g.p.n.e. - i ima brojeve 4, 9, 2, 3, 5, 7, 8, 1, 6.

# Historija Magičnih kvadrata

- ▶ Magični kvadrati su fascinirali razne kulture tokom duge historije njihovog postojanja, uključujući Kinu, Egipat i Indiju. Smatralo se da imaju magičnu i božju moć i često su se nalazili na talismanima.

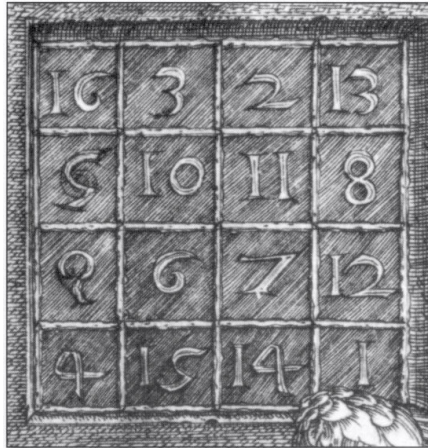
# Historija Magičnih kvadrata

- ▶ Magični kvadrati su fascinirali razne kulture tokom duge historije njihovog postojanja, uključujući Kinu, Egipat i Indiju. Smatralo se da imaju magičnu i božju moć i često su se nalazili na talismanima.
- ▶ Oko 1300 godine, nastavljajući rad arapskog matematičara Al Bunija, grčki bizantijski naučnik Manuel Moschopoulos je napisao tretizu na temu m.k. isključujući misticizam svojih prethodnika. On je bio prvi zapadnjak koji je pisao o ovoj temi.

# Historija Magičnih kvadrata

- ▶ Magični kvadrati su fascinirali razne kulture tokom duge historije njihovog postojanja, uključujući Kinu, Egipat i Indiju. Smatralo se da imaju magičnu i božju moć i često su se nalazili na talismanima.
- ▶ Oko 1300 godine, nastavljajući rad arapskog matematičara Al Bunija, grčki bizantijski naučnik Manuel Moschopoulos je napisao tretizu na temu m.k. isključujući misticizam svojih prethodnika. On je bio prvi zapadnjak koji je pisao o ovoj temi.
- ▶ Najpoznatiji zapadni magični kvadrati su tzv. Agrippini magični kvadrati iz djela 'De Occulta Philosophia' koji se i dan danas koriste u magijskim ceremonijama kao 'magični'.

# Magični kvadrat Albrecht Dürer



# Tipovi magičnih kvadrata

- ▶ Magični kvadrati se mogu klasificirati u tri tipa: neparne, dvostruko parne i jednostruko parne.

# Tipovi magičnih kvadrata

- ▶ Magični kvadrati se mogu klasificirati u tri tipa: neparne, dvostruko parne i jednostruko parne.
- ▶ Neparne i dvostruko parne m.k. je lako generisati; Konstrukcija jednostruko parnih magičnih kvadrata je teža ali postoji nekoliko metoda.

# Tipovi magičnih kvadrata

- ▶ Magični kvadrati se mogu klasificirati u tri tipa: neparne, dvostruko parne i jednostruko parne.
- ▶ Neparne i dvostruko parne m.k. je lako generisati; Konstrukcija jednostruko parnih magičnih kvadrata je teža ali postoji nekoliko metoda.
- ▶ Broj različitih magičnih kvadrata je (po redovima)ž

1, 0, 1, 880, 275305224 ...